

---

# La geometria frattale: teoria e applicazioni

F. Rosso

email:[fabio.rosso@math.unifi.it](mailto:fabio.rosso@math.unifi.it) website:[www.math.unifi.it/~rosso](http://www.math.unifi.it/~rosso)

Dipartimento di Matematica “Ulisse Dini”, Università di Firenze



# Le linee guida di questa chiacchierata

---



# Le linee guida di questa chiacchierata

---

- Perché le “applicazioni”?



# Le linee guida di questa chiacchierata

---

- Perché le “applicazioni”?
- Un po' di storia (da Weierstrass a Mandelbrot)

# Le linee guida di questa chiacchierata

---

- Perché le “applicazioni”?
- Un po' di storia (da Weierstrass a Mandelbrot)
- Elementi di Geometria Frattale

# Le linee guida di questa chiacchierata

---

- Perché le “applicazioni”?
- Un po’ di storia (da Weierstrass a Mandelbrot)
- Elementi di Geometria Frattale
- Frattali “matematici” e frattali “naturali”

# Le linee guida di questa chiacchierata

---

- Perché le “applicazioni”?
- Un po’ di storia (da Weierstrass a Mandelbrot)
- Elementi di Geometria Frattale
- Frattali “matematici” e frattali “naturali”
- Alcuni modelli applicativi

# Le linee guida di questa chiacchierata

---

- Perché le “applicazioni”?
- Un po’ di storia (da Weierstrass a Mandelbrot)
- Elementi di Geometria Frattale
- Frattali “matematici” e frattali “naturali”
- Alcuni modelli applicativi
- Conclusioni

# Perché “le applicazioni” ?

---



# Perché “le applicazioni” ?

---

- Innanzitutto perché questa è parte della mia esperienza culturale (ricerca e didattica), ma anche perché in natura si trovano

# Perché “le applicazioni” ?

---

- Innanzitutto perché questa è parte della mia esperienza culturale (ricerca e didattica), ma anche perché in natura si trovano
- una quantità impressionante di fenomeni di varia complessità

# Perché “le applicazioni” ?

---

- Innanzitutto perché questa è parte della mia esperienza culturale (ricerca e didattica), ma anche perché in natura si trovano
- una quantità impressionante di fenomeni di varia complessità
- che richiedono spesso un uso raffinato di strumenti matematici classici,

# Perché “le applicazioni” ?

---

- Innanzitutto perché questa è parte della mia esperienza culturale (ricerca e didattica), ma anche perché in natura si trovano
- una quantità impressionante di fenomeni di varia complessità
- che richiedono spesso un uso raffinato di strumenti matematici classici,
- che spingono talvolta a sviluppare nuovi modelli matematici basati su tecniche note,

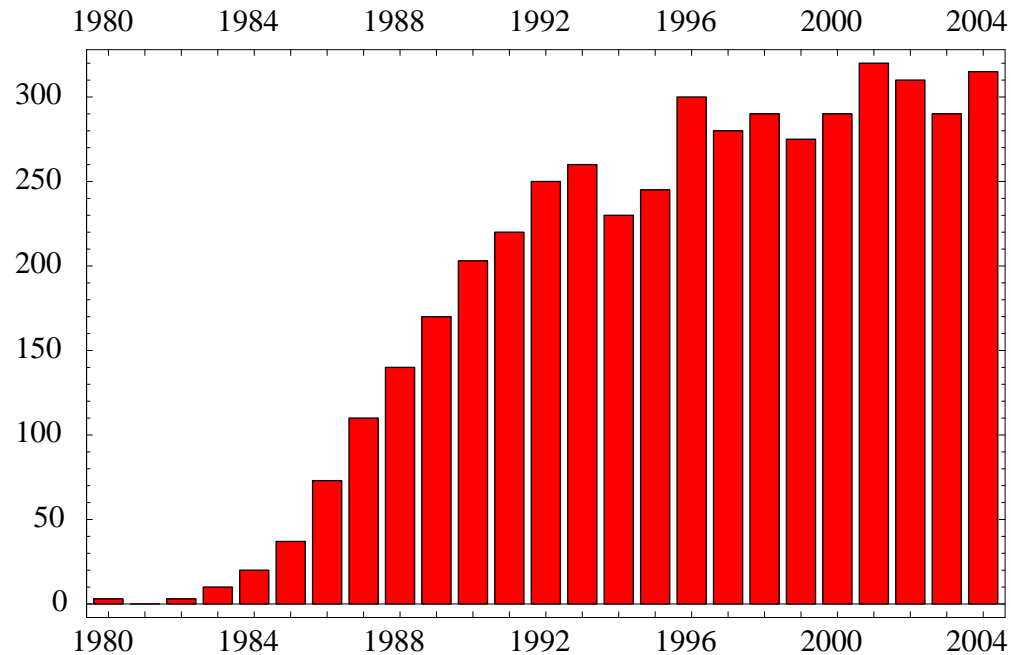
# Perché “le applicazioni” ?

---

- Innanzitutto perché questa è parte della mia esperienza culturale (ricerca e didattica), ma anche perché in natura si trovano
- una quantità impressionante di fenomeni di varia complessità
- che richiedono spesso un uso raffinato di strumenti matematici classici,
- che spingono talvolta a sviluppare nuovi modelli matematici basati su tecniche note,
- e che costituiscono a volte una sfida per sviluppare tecniche e strumenti matematici innovativi.

# Perché “le applicazioni” ?

Perché la ricerca applicata fa largo uso della teoria dei frattali!



Numero di articoli pubblicati annualmente in ambito geologico e che fanno uso di tecniche “frattali”

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Due concetti dominanti fino alla metà del XIX secolo:



# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Due concetti dominanti fino alla metà del XIX secolo:

- **dimensione euclidea** (un punto geometrico è privo di dimensione, una retta è unidimensionale, ecc.)

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Due concetti dominanti fino alla metà del XIX secolo:

- **dimensione euclidea** (un punto geometrico è privo di dimensione, una retta è unidimensionale, ecc.)
- **funzione differenziabile** (la derivata di una funzione può avere al più un numero finito di punti di discontinuità)

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Due concetti dominanti fino alla metà del XIX secolo:

- **dimensione euclidea** (un punto geometrico è privo di dimensione, una retta è unidimensionale, ecc.)
- **funzione differenziabile** (la derivata di una funzione può avere al più un numero finito di punti di discontinuità)
- Tuttavia ...

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Alcune tappe importanti

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Alcune tappe importanti

- funzione di Weierstrass (1875)

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Alcune tappe importanti

- funzione di Weierstrass (1875)
- curva di Peano (1890)

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

## Alcune tappe importanti

- funzione di Weierstrass (1875)
- curva di Peano (1890)
- mappa di Cantor (1878)

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

## Alcune tappe importanti

- funzione di Weierstrass (1875)
- curva di Peano (1890)
- mappa di Cantor (1878)
- teorema di Brouwer (1911)

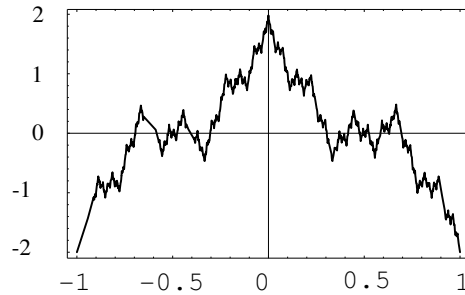
# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

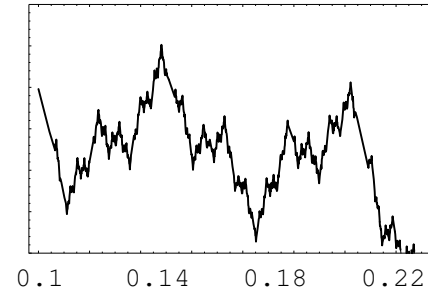
La funzione di Weierstrass:  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \cos(3^k \pi x)$

# Da Weierstrass a Mandelbrot

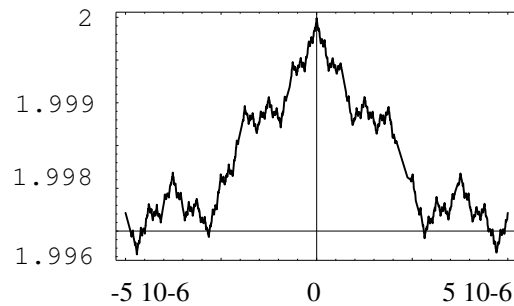
La funzione di Weierstrass:  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \cos(3^k \pi x)$



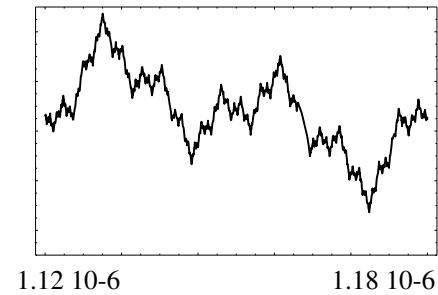
(a)



(b)



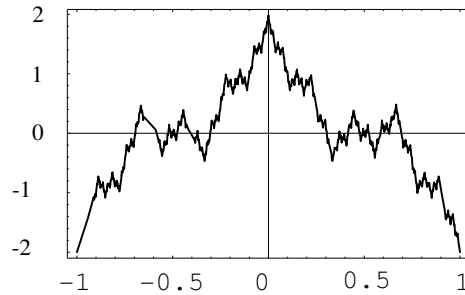
(c)



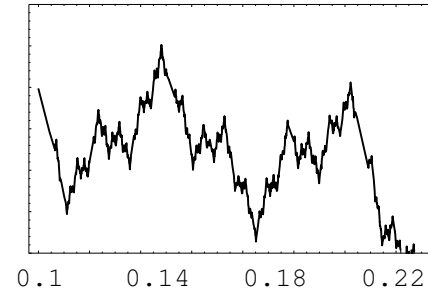
(d)

# Da Weierstrass a Mandelbrot

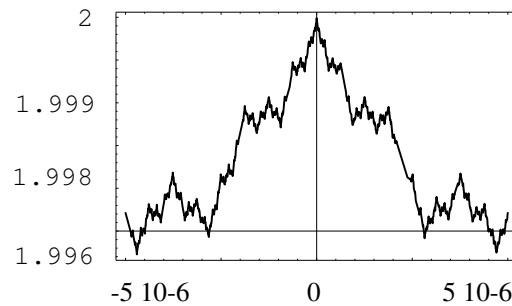
La funzione di Weierstrass:  $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \cos(3^k \pi x)$



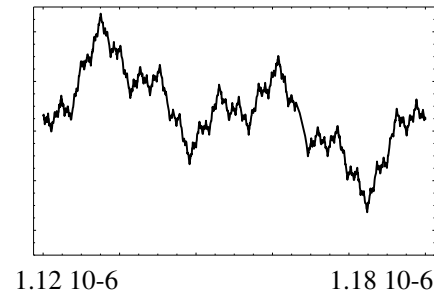
(a)



(b)



(c)



(d)

- $f$  è continua ma **non derivabile**  $\forall x \in \mathbb{R}$

# Da Weierstrass a Mandelbrot

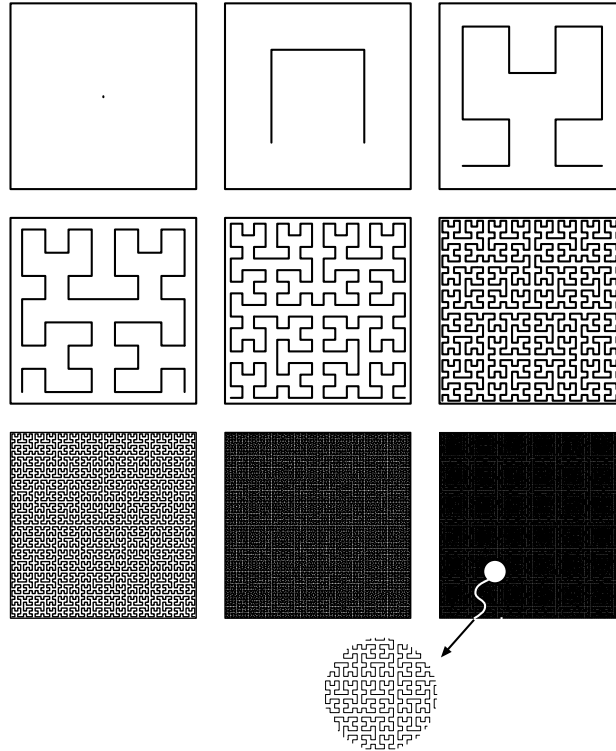
---

La curva di Peano (metodo di Hilbert)



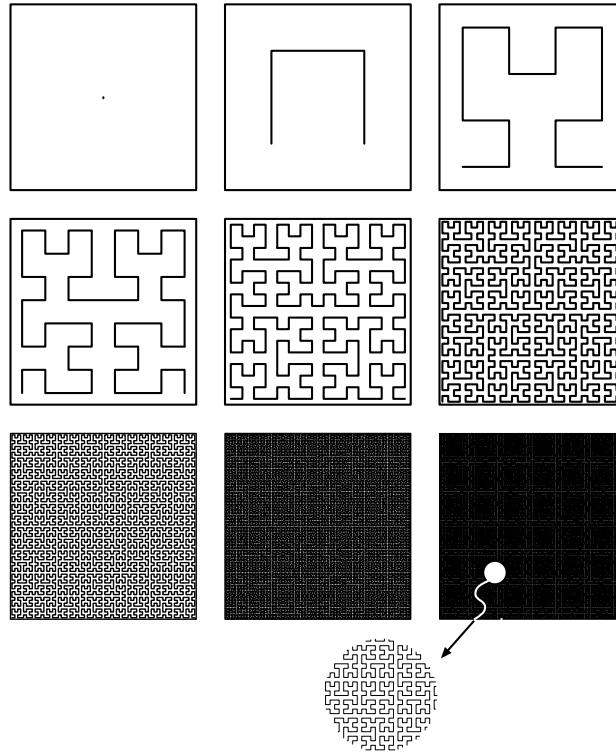
# Da Weierstrass a Mandelbrot

## La curva di Peano (metodo di Hilbert)



# Da Weierstrass a Mandelbrot

## La curva di Peano (metodo di Hilbert)



- La curva limite è continua e “riempie” il quadrato ma non è biettiva

# Da Weierstrass a Mandelbrot

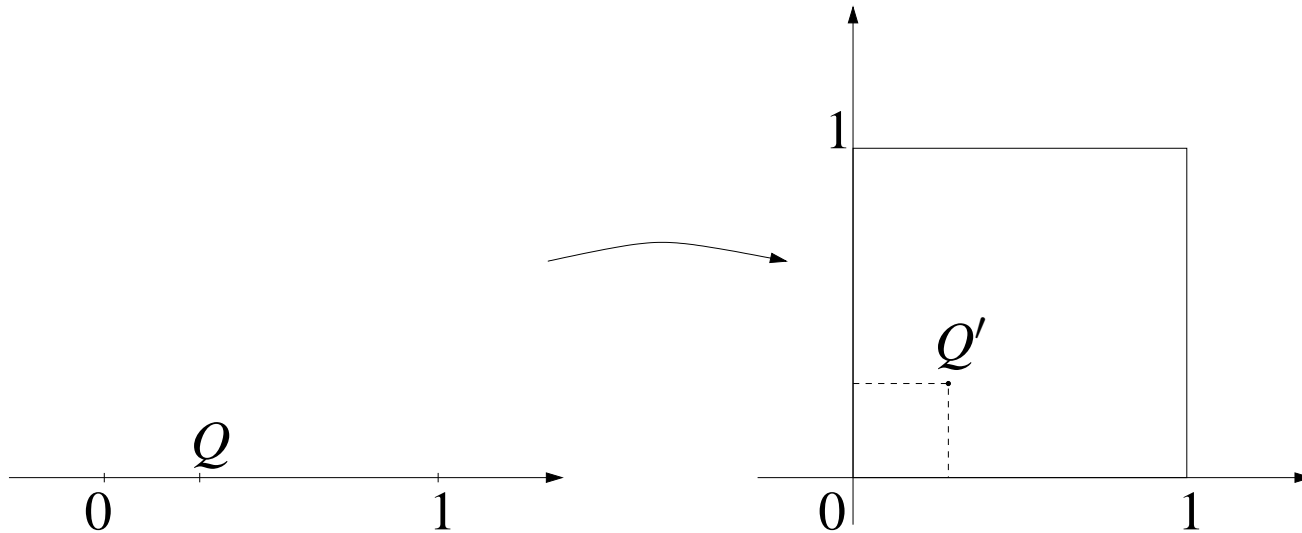
---

La mappa di Cantor: il segmento  $[0, 1]$  e il quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  sono **equipotenti**



# Da Weierstrass a Mandelbrot

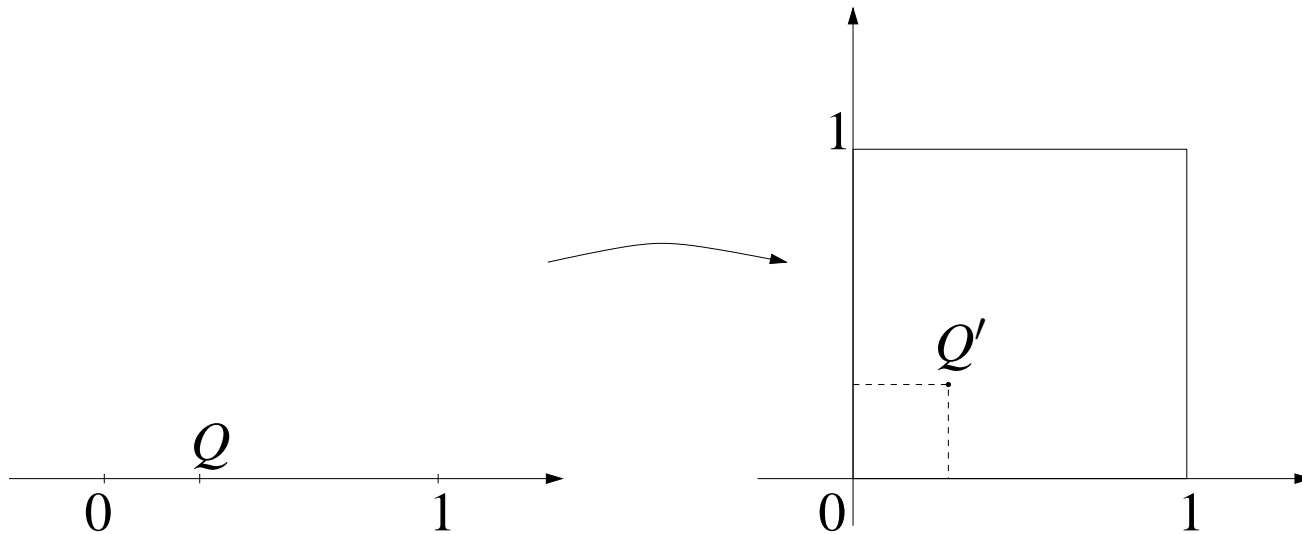
La mappa di Cantor: il segmento  $[0, 1]$  e il quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  sono **equipotenti**



$$Q = 0.p_1p_2p_3p_4 \dots \mapsto Q' = (x', y') = (0.p_1p_3 \dots, 0.p_2p_4 \dots)$$

# Da Weierstrass a Mandelbrot

La mappa di Cantor: il segmento  $[0, 1]$  e il quadrato  $[0, 1] \times [0, 1]$  sono **equipotenti**



$$Q = 0.p_1p_2p_3p_4 \dots \mapsto Q' = (x', y') = (0.p_1p_3 \dots, 0.p_2p_4 \dots)$$

- La mappa di Cantor è biunivoca ma non è continua

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Cos'è la dimensione?



# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Cos'è la dimensione?

IPOSTESI di LAVORO: È – per definizione – **una proprietà topologica**.

La topologia è la ricerca di proprietà invarianti per **omeomorfismi** (trasformazioni biunivoche e bicontinue).

Orbene:

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Cos'è la dimensione?

IPOSTESI di LAVORO: È – per definizione – **una proprietà topologica**.

La topologia è la ricerca di proprietà invarianti per **omeomorfismi** (trasformazioni biunivoche e bicontinue).

Orbene:

- **La curva di Peano non è un omeomorfismo**

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Cos'è la dimensione?

IPOSTESI di LAVORO: È – per definizione – una proprietà topologica.

La topologia è la ricerca di proprietà invarianti per omeomorfismi (trasformazioni biunivoche e bicontinue).

Orbene:

- La curva di Peano non è un omeomorfismo
- La mappa di Cantor non è un omeomorfismo

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Cos'è la dimensione?

IPOSTESI di LAVORO: È – per definizione – una proprietà topologica.

La topologia è la ricerca di proprietà invarianti per omeomorfismi (trasformazioni biunivoche e bicontinue).

Orbene:

- La curva di Peano non è un omeomorfismo
- La mappa di Cantor non è un omeomorfismo

**Pertanto nessuno dei due esempi è un controesempio all'IPOSTESI**

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

E se esistesse un omeomorfismo fra  $[0, 1]$  e  $[0, 1] \times [0, 1]$ ?



## Da Weierstrass a Mandelbrot

---

E se esistesse un omeomorfismo fra  $[0, 1]$  e  $[0, 1] \times [0, 1]$ ?  
In tal caso l'IPOTESI di LAVORO andrebbe abbandonata!

## Da Weierstrass a Mandelbrot

---

E se esistesse un omeomorfismo fra  $[0, 1]$  e  $[0, 1] \times [0, 1]$ ?  
In tal caso l'IPOTESI di LAVORO andrebbe abbandonata!

Fortunatamente ciò non può accadere: **se  $I^n$  e  $I^m$  sono pluri-intervalli di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  rispettivamente con  $n \neq m$  (interi positivi) allora non esiste alcun omeomorfismo fra essi (Brouwer, 1911)**



# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

Il risultato di Brouwer non risponde alla domanda: qual è una corretta definizione di “dimensione”?

**Il problema non è semplice!**

Attualmente esistono varie definizioni di dimensione e il motivo è che ciascuna di queste cerca di mettere in evidenza caratteristiche particolari di una certa classe di oggetti.

Fra le tante:...

# Da Weierstrass a Mandelbrot

---

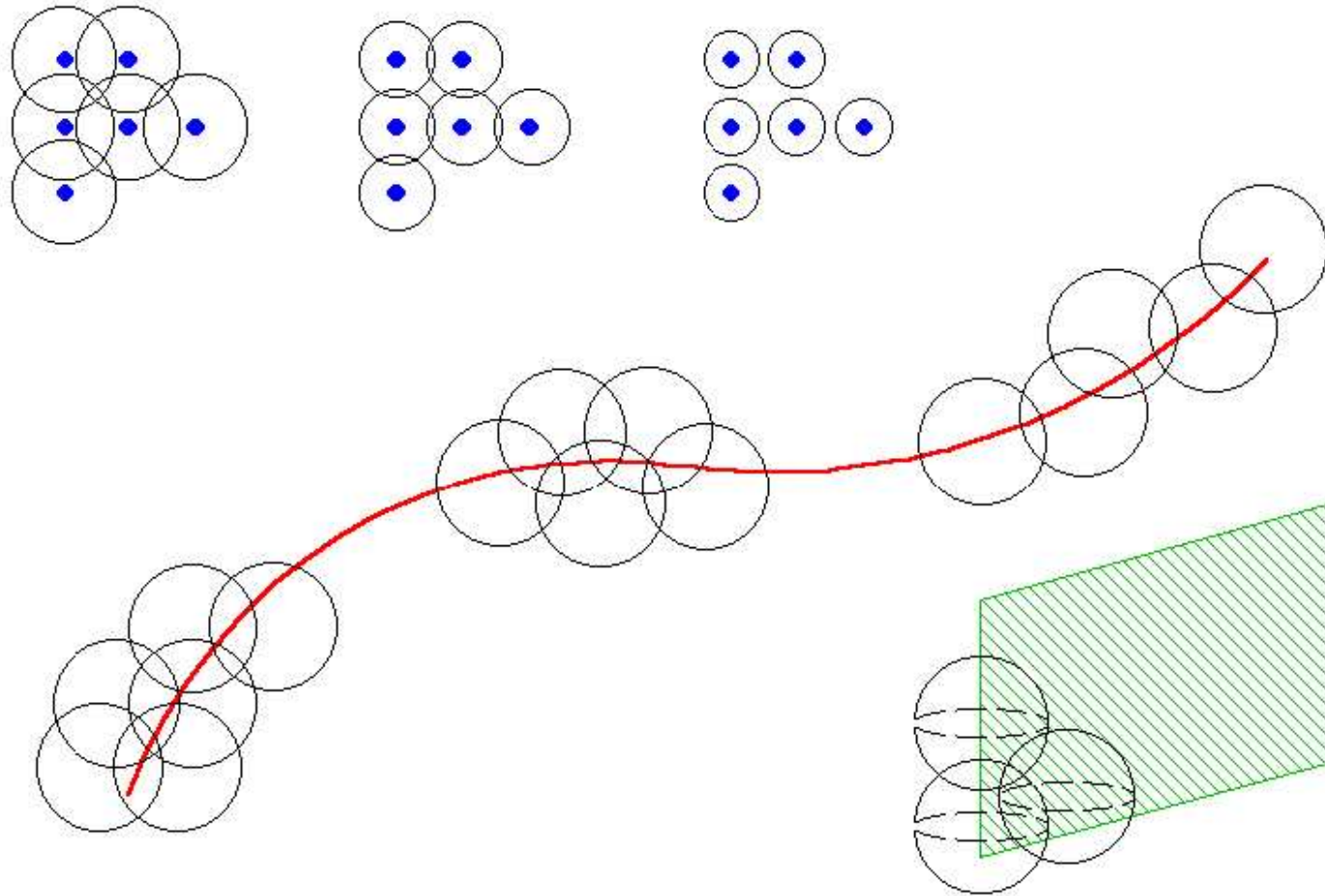
**dimensione topologica  $D_T$  (Weyl)**: uno spazio topologico  $X$  ha  $D_T = m$  se ogni ricoprimento  $\mathcal{C}$  di  $X$  ha un raffinamento  $\mathcal{C}'$  nel quale ogni punto di  $X$  appartiene ad *al più*  $m + 1$  insiemi di  $\mathcal{C}'$  ed  $m$  è il più piccolo di tali interi

**dimensione di Hausdorff  $D_H$** : è molto tecnica e molto generale. Una sua versione “soft” per insiemi *auto-simili* (caratteristica tipica dei frattali matematici) è la “dimensione di similarità”.

**dimensione “box-counting”  $D_B$** : molto utile nelle applicazioni, è basata sull’uso di una griglia a maglie quadrate che ricopre l’oggetto (supposto piano). Fornisce una stima di  $D_H$ .

**dimensione “ruler-based”  $D_R$** : usata storicamente per le linee di costa, è basata sulla “rettificazione”. Fornisce una stima di  $D_H$ .

# Elementi di Geometria Frattale



La dimensione topologica da un punto di vista intuitivo

# Elementi di Geometria Frattale

---


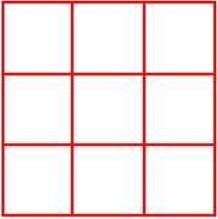
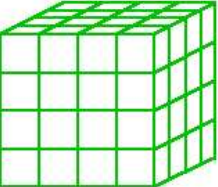
**Autosimilarità** da un punto di vista intuitivo: Un oggetto è geometricamente **simile** ad un altro, se coincide con esso a meno di omotetie e/o movimenti rigidi (più eventualmente una riflessione).

Un oggetto è **autosimile** se consiste di un numero  $N$  di copie di sè stesso “riscalate” (omoteticamente) di un fattore  $r$ . La relazione fra il numero  $N$  di oggetti riscaldati e il fattore di riduzione è  $N = r^{D_s}$ .

L'esponente  $D_s = \frac{\log N}{\log r}$  è la **dimensione di similarità**.

# Elementi di Geometria Frattale

La dimensione di similarità per alcuni oggetti autosimili della geometria euclidea

	$r$	$N$	$N=r^D$
 line	5	5	$5^1$
 square	3	9	$3^2$
 cube	4	64	$4^3$

La dimensione di similarità  $D_H$  coincide con la dimensione topologica  $D_T$ .

# Elementi di Geometria Frattale

---

Molti oggetti semplici della geometria classica (segmento, quadrato, cubo,...) sono autosimili. I seguenti (meno semplici) sono ugualmente esempi di oggetti autosimili:



# Elementi di Geometria Frattale

---

Molti oggetti semplici della geometria classica (segmento, quadrato, cubo,...) sono autosimili. I seguenti (meno semplici) sono ugualmente esempi di oggetti autosimili:

- INSIEME TERNARIO DI CANTOR

# Elementi di Geometria Frattale

---

Molti oggetti semplici della geometria classica (segmento, quadrato, cubo,...) sono autosimili. I seguenti (meno semplici) sono ugualmente esempi di oggetti autosimili:

- INSIEME TERNARIO DI CANTOR

- ISOLA DI VON KOCH

# Elementi di Geometria Frattale

---

Molti oggetti semplici della geometria classica (segmento, quadrato, cubo,...) sono autosimili. I seguenti (meno semplici) sono ugualmente esempi di oggetti autosimili:

- INSIEME TERNARIO DI CANTOR

- ISOLA DI VON KOCH

- TRIANGOLO DI SIERPINSKI

# Elementi di Geometria Frattale

---

Molti oggetti semplici della geometria classica (segmento, quadrato, cubo,...) sono autosimili. I seguenti (meno semplici) sono ugualmente esempi di oggetti autosimili:

- INSIEME TERNARIO DI CANTOR


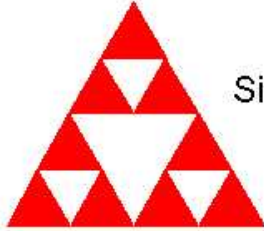
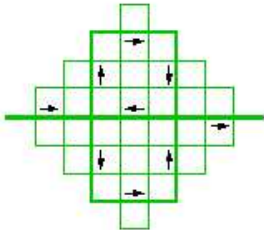
- ISOLA DI VON KOCH

- TRIANGOLO DI SIERPINSKI

- SPUGNA DI MENGER

# Elementi di Geometria Frattale

La dimensione di similarità per alcuni oggetti autosimili della geometria **frattale**

	$D_T$	$r$	$N$	$D_S = \frac{\log N}{\log r}$
 Cantor Set	0	3	2	0.63
 Sierpinski Gasket	1	2	3	1.58
 Peano Curve	1	3	9	2.00

# Elementi di Geometria Frattale

---

Negli oggetti frattali la dimensione di Hausdorff  $D_H$  è (per definizione) maggiore della dimensione topologica  $D_T$ . Può risultare  $D_H \notin \mathbb{N}$  (insieme di Cantor, curva di von Koch, ecc.) ma anche  $D_H \in \mathbb{N}$  (frontiera dell'insieme di Mandelbrot).

Un'altra caratteristica è che il fattore di scala di un oggetto euclideo può essere scelto arbitrariamente mentre per un frattale è fisso .

# Il famoso insieme di Mandelbrot

---

Indichiamo con  $z$  un punto del piano cartesiano di coordinate  $(x, y)$  e costruiamo “per ricorrenza” una sequenza di punti  $z_n$  secondo la legge

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 = \text{prefissato}$$

Il punto  $c$  può essere scelto a piacere (purché diverso dall'origine  $(0, 0)$ ); a seconda della scelta fatta, avremo risultati diversi. Come si usa questa formula? Si prende in esame un rettangolo  $R$  del piano “cartesiano”. Fissiamo  $z_0$  (punto iniziale della successione) pari a  $(0, 0)$  (origine del piano) ed registriamo il comportamento della sequenza  $z_n$  facendo “esplorare” la regione  $R$  dal parametro  $c$ .

# Il famoso insieme di Mandelbrot

---

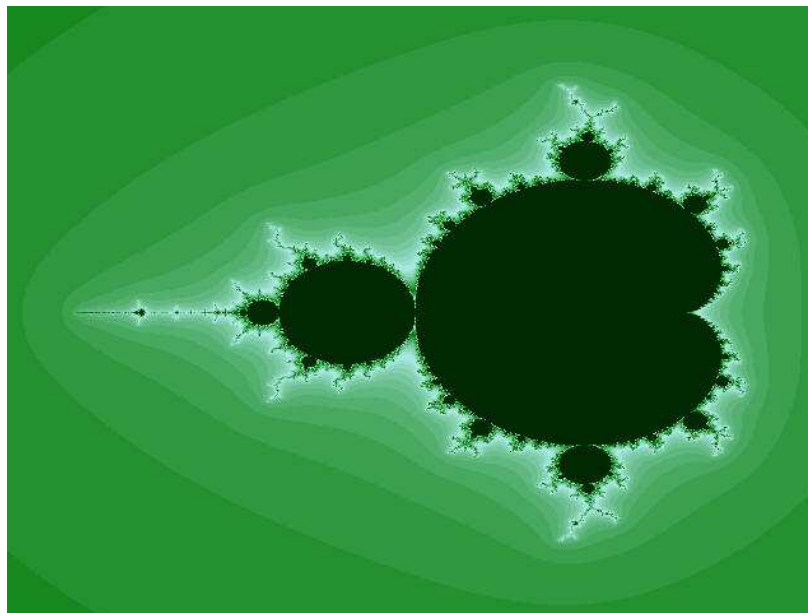
La sequenza  $z_n$  così costruita può:

- **divergere**: il “modulo” di  $z_n$  (cioè la sua distanza dall’origine del piano) cresce diventando arbitrariamente grande all’aumentare di  $n$ ;
- **non divergere**: il modulo di  $z_n$  si mantiene “limitato”.

Eseguiamo varie volte il calcolo cambiando la scelta di  $c$  ogni volta. Al computer diciamo di colorare di verde scuro i punti  $c$  di  $R$  per cui la successione non diverge, e di un colore chiaro quelli per cui diverge. Come appare l’immagine finale (cioè quando “tutta” la regione  $R$  è stata testata)?

# Il famoso insieme di Mandelbrot

---



L'immagine ottenuta (l'**insieme di Mandelbrot**) è la “rappresentazione del comportamento del processo iterativo definito dalla formula  $z_{n+1} = z_n^2 + c$  al variare di  $c$  in  $R$ ”. Quest’oggetto matematico ha caratteristiche sorprendenti: possiede infinite “copie di se stesso” al suo interno!

## Il famoso insieme di Mandelbrot

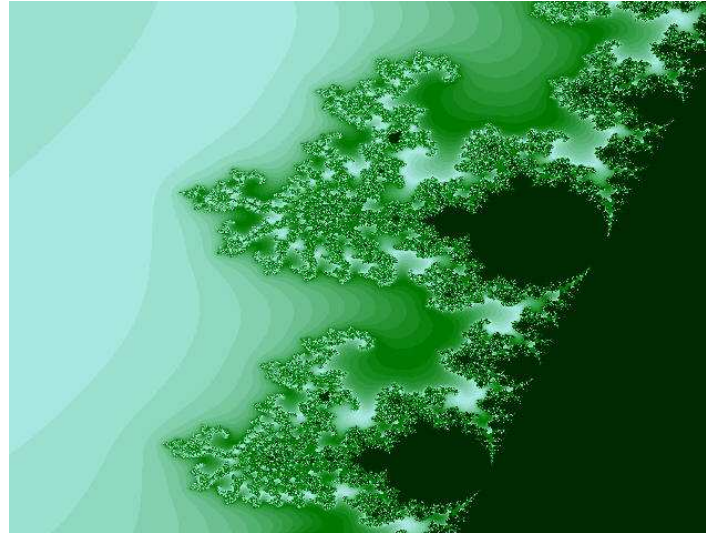
---

È sbagliato pensare che tutti i frattali hanno dimensione di Hausdorff non intera: Shishikura (1994) ha dimostrato che per la frontiera dell'insieme di Mandelbrot risulta  $D_H = 2$  (mentre  $D_T = 1$ ).

Sull'insieme di Mandelbrot si ignorano ancora molte cose: non si sa, ad esempio, se sia o meno *connesso per poligonalità* e la sua area è stata solo stimata.

# Il famoso insieme di Mandelbrot

---



Un particolare dell'insieme di Mandelbrot. Si intuisce il concetto di “superficie finita con bordo infinito”: continuando a zoomare il bordo apparirà sempre frastagliato. Se poteste misurarlo, sarebbe “infinitamente lungo”. Proviamo ad ingrandire una di quelle macchioline scure isolate che compaiono in quest'ultima immagine:

# Il famoso insieme di Mandelbrot

---

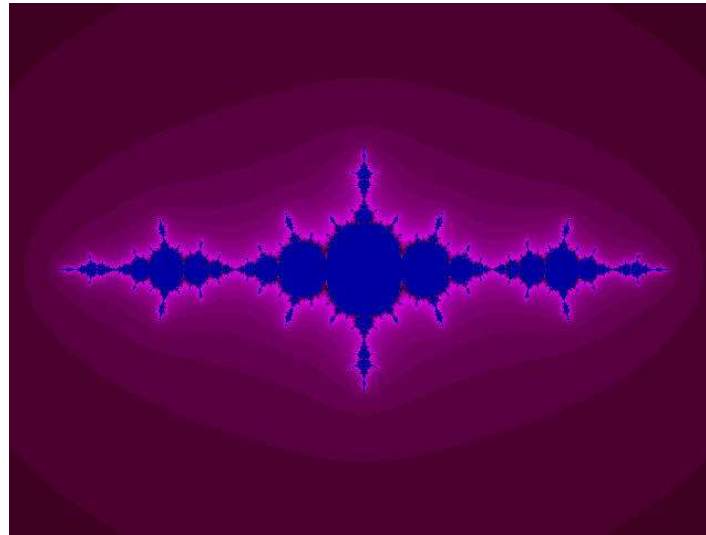


Sembra proprio simile alla prima immagine! E si potrebbe ingrandire ancora... e il risultato sarebbe lo stesso. Come già detto, in queste immagini il verde scuro indica i punti in cui non si ha divergenza, mentre i colori chiari sono sinonimo di divergenza; le diverse sfumature di verde chiaro dipendono dalla velocità di divergenza.

## Insieme di Julia

---

Se invece si mantiene fisso  $c$  e si fa variare  $z_0$  in  $R$  si ottengono i cosiddetti “insiemi di Julia”

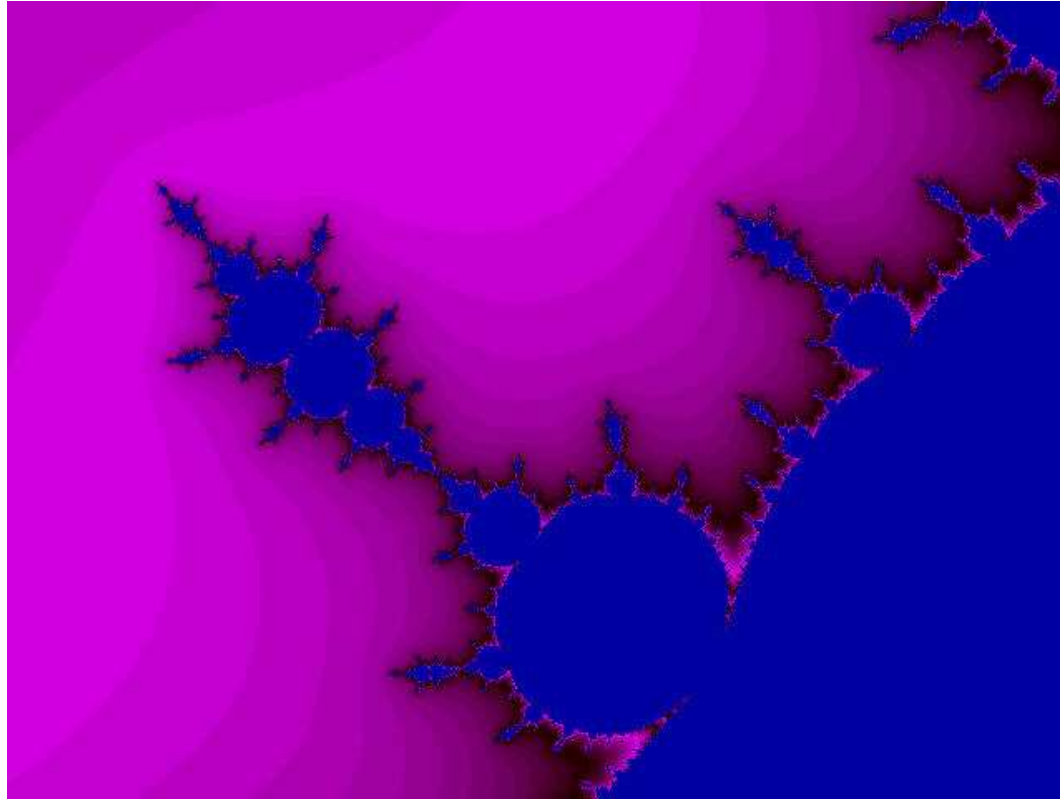


In questo caso  $c = (-1.25, 0)$ .

Gli insiemi di Julia sono oggetti strettamente “autosomiglianti”. Nell’insieme di Mandelbrot questa proprietà è vera solo in parte

# Insieme di Julia

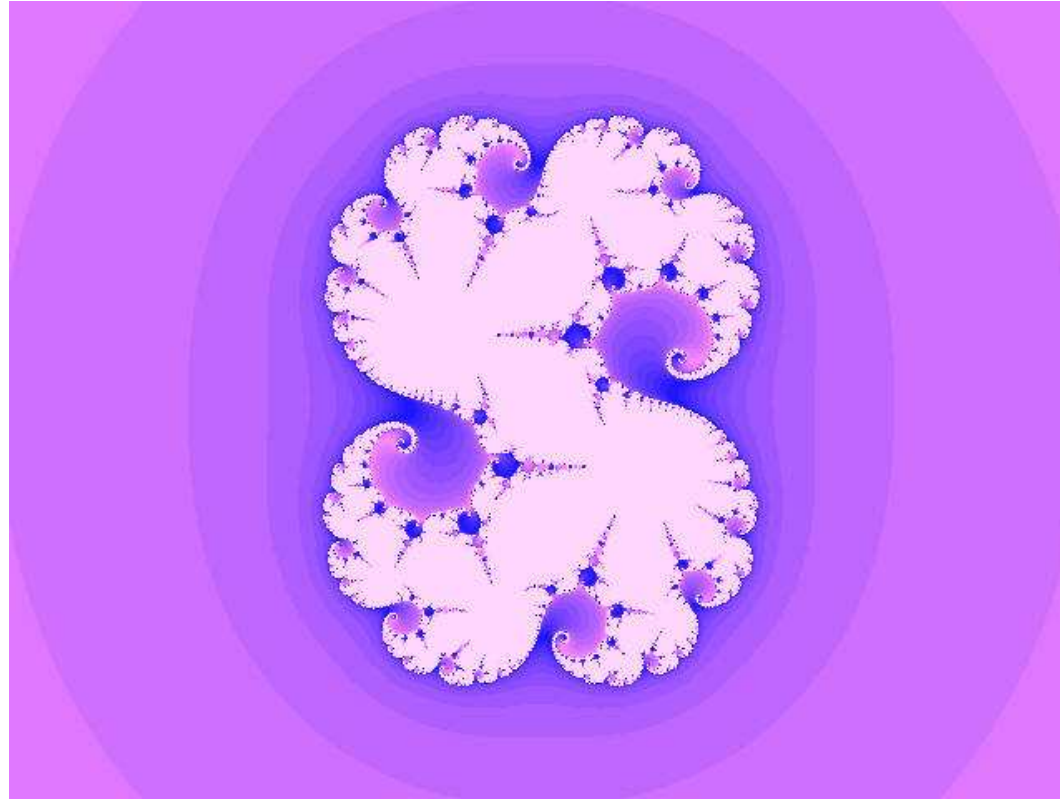
---



Particolare dell'insieme di Julia precedente

# Insieme di Julia

---



Altro insieme di Julia ( $c = (0.27334, 0.00742)$ )

# Insieme di Julia

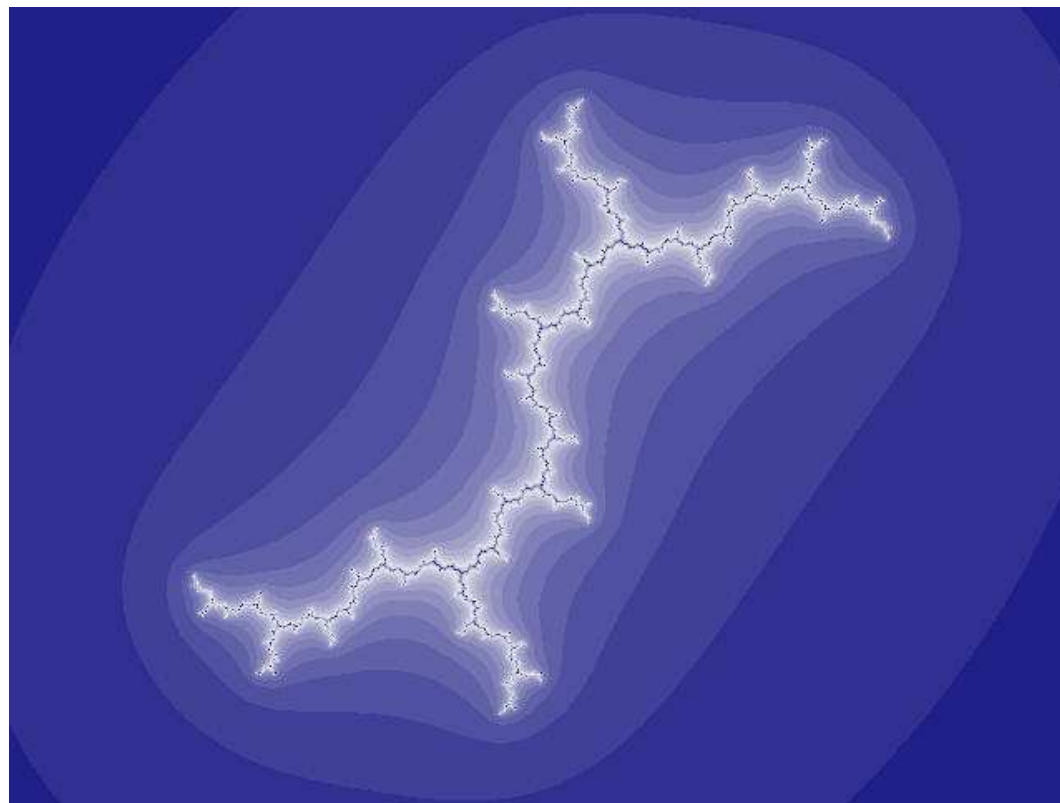
---



Particolare dell'insieme di Julia

# Insieme di Julia

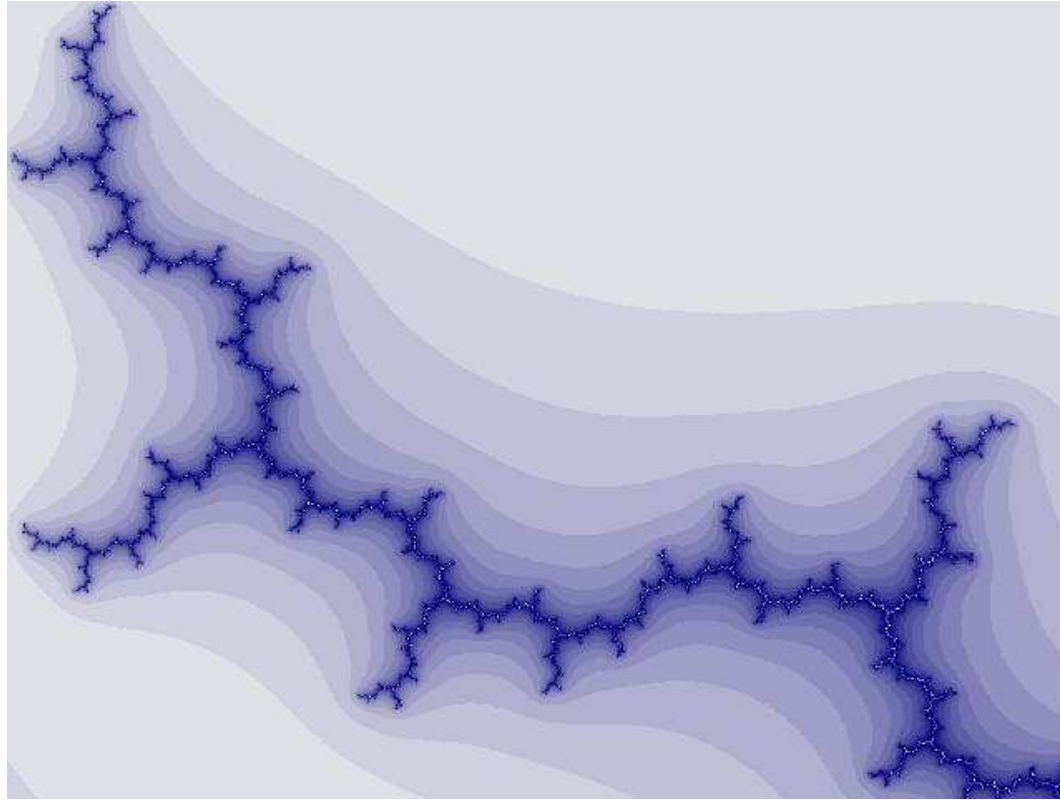
---



La “dendrite”: è un altro esempio di insieme di Julia (in questo caso  $c = (0, 1)$ )

# Insieme di Julia

---



Particolare dell'immagine precedente

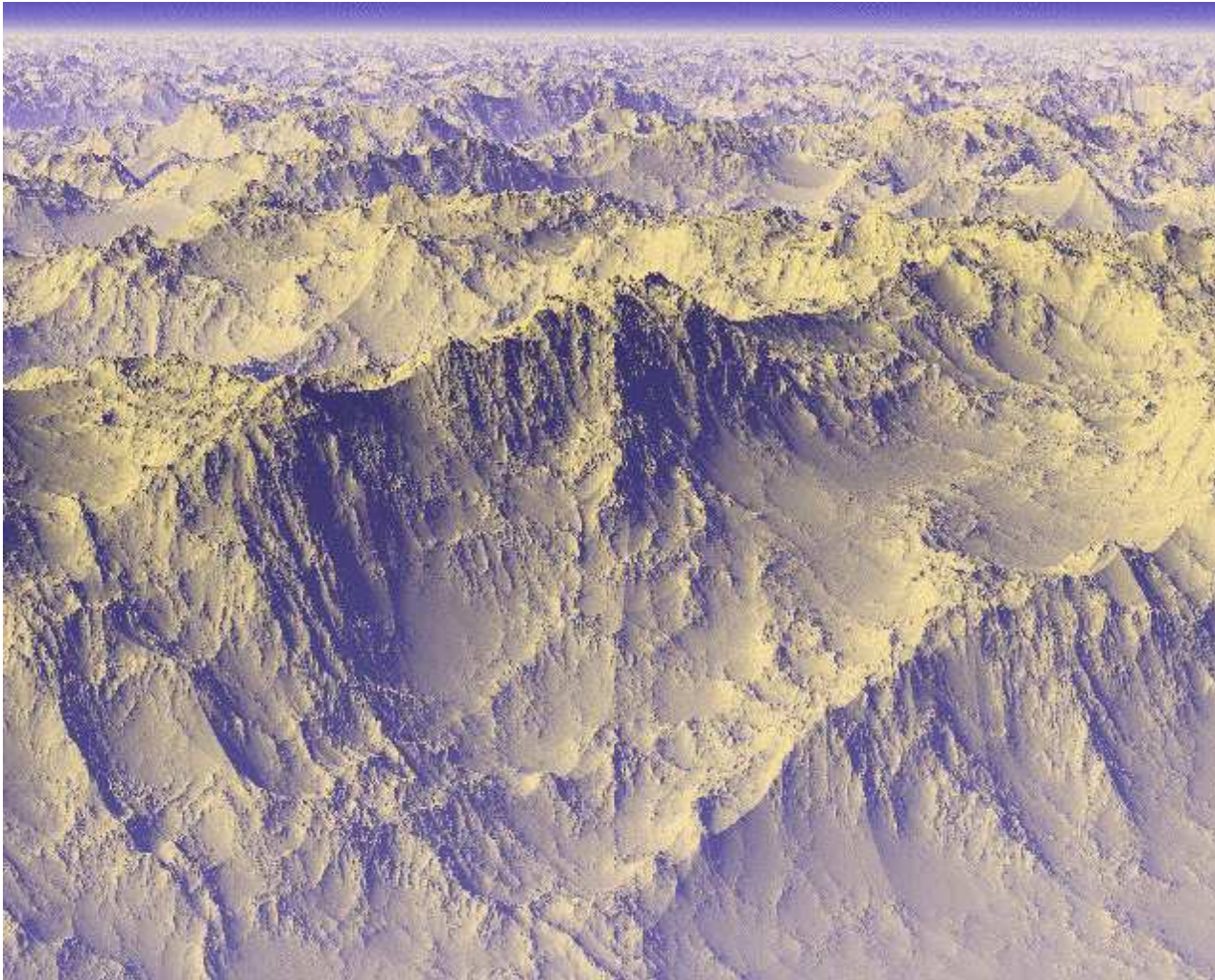
# Computer Graphics

---

Per la loro bellezza e per la facilità di realizzazione con tecniche di Computer Graphics, i frattali vengono comunemente usati in cinematografia (soprattutto fantascienza) per generare scenari artificiali. Alcuni esempi:

# Computer Graphics

---



# Computer Graphics

---



# Computer Graphics

---



# Frattali “matematici” e “naturali”

---

Un frattale matematico è autosimile quale che sia la scala di osservazione. La autosimilarità può essere “forte” (curva di von Koch, varie costruzioni di Sierpinski, spugna di Menger, insimi di Julia,...) o “debole” (insieme di Mandelbrot,...)



# Frattali “matematici” e “naturali”

---

Un frattale matematico è autosimile quale che sia la scala di osservazione. La autosimilarità può essere “forte” (curva di von Koch, varie costruzioni di Sierpinski, spugna di Menger, insimi di Julia,...) o “debole” (insieme di Mandelbrot,...)

- zooming sulla curva di von Koch

# Frattali “matematici” e “naturali”

---

Un frattale matematico è autosimile quale che sia la scala di osservazione. La autosimilarità può essere “forte” (curva di von Koch, varie costruzioni di Sierpinski, spugna di Menger, insimi di Julia,...) o “debole” (insieme di Mandelbrot,...)

- zooming sulla curva di von Koch
- viaggio nell'insieme di Mandelbrot



# Frattali “matematici” e “naturali”

---

In natura si osserva una grande quantità di oggetti o fenomeni con evidenti caratteristiche “autosimili”:

- Il broccolo romanesco
- Linee di costa (Norvegia)
- un bacino fluviale (nilo)
- Loess Plateau (Cina centrale)
- formazioni minerali (dendrite)

# Frattali “matematici” e “naturali”

---

## Altri esempi

- albero
- fiocchi di neve
- formazioni dendritiche anodo–catodo
- ghiacciaio del Kilimanjaro

# Autosimilarità delle linee di costa

---

Le linee di costa sono state le prime ad essere studiate da questo punto di vista



## La dimensione in base alla “rettificazione”

---

Sappiamo anche come misurare **approssimatamente** la lunghezza di una curva utilizzando metodi di “rettificazione”: si utilizza un segmento campione di lunghezza fissa “ $d$ ” e si conta il numero  $N$  di tali segmenti necessari ad approssimare la curva. La lunghezza  $L(d)$  della curva **misurata alla scala  $d$**  è

$$L(d) = N * d$$

Ovviamente  $N = N(d)$  (o, equivalentemente,  $d = d(N)$ ).

## La dimensione in base alla “rettificazione”

---

La dimensione “per rettificazione” è calcolata a partire dalla relazione  $N = N(d)$ . Nelle curve classiche (non frattali) la tendenza di  $d$  a zero risulta  $N(d) \simeq cd^{-1}$  (dove  $c$  è una costante dipendente dalla curva considerata). Per le curve frattali strettamente autosimili risulta  $N(d) \simeq cd^{-s-1}$  (con  $s \neq 0$ ) e quindi  $L \simeq cd^{-s}$ . Se si calcola  $D_S$  si trova che  $D_S = s + 1$ . Viene allora naturale definire  $D_R = 1 + s$  come dimensione “per rettificazione”.

## Dimensione $D_R$ delle linee geografiche

---

Un profilo di costa appare un oggetto **approssimativamente** “**autosimile**” (cioè solo entro un certo intervallo di scale).

**Spiegazione:** il processo di erosione di una costa *opera approssimativamente allo stesso modo su un ampio intervallo di scale di osservazione.*



click1

click2

## Dimensione $D_R$ delle linee geografiche

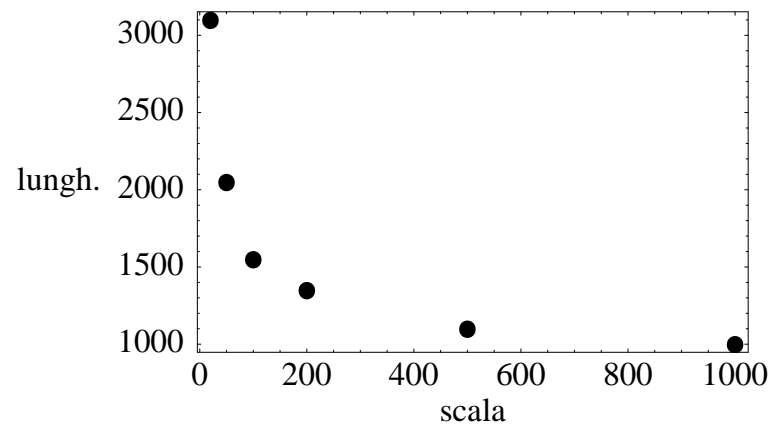
---

**OBIEZIONE:** più piccola è la scala maggiori saranno i dettagli della costa, ma c'è il rischio che il processo di misura **non sia convergente**.

L'“auto-similarità” della costa anche a scale molto piccole potrebbe far sì che  $L \rightarrow +\infty$  se  $d \rightarrow 0$  (cioè quello che accade alle curve frattali strettamente autosimili)

# Dimensione $D_R$ delle linee geografiche

**Osservazioni di Richardson (1961):** misurazioni effettuate con la procedura standard (lunghezza  $L(d)$  della linea di costa di Australia, Sudafrica, Gran Bretagna e dei confini terrestri per Germania e Portogallo) a differenti scale di lunghezza  $d$ .

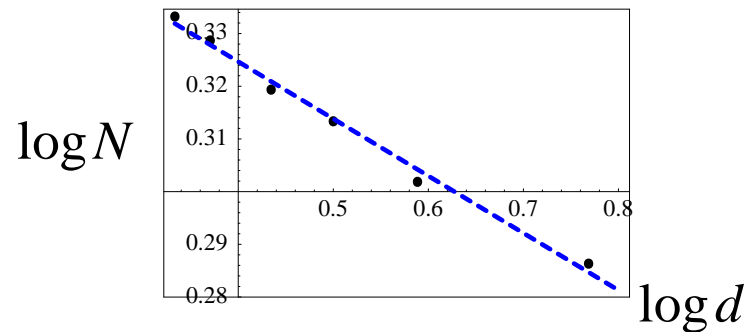


Il grafico di sinistra mostra i suoi dati per la costa ovest della Gran Bretagna. Richardson notò che riducendo la scala la lunghezza cresceva rapidamente.

## Dimensione $D_R$ delle linee geografiche

Sia questo che gli altri grafici sembrano obbedire alla legge  $L = \text{cost.} \times d^{-s}$  e quindi Richardson pensò di riportare i dati in forma logaritmica ponendo il  $\log_{10} L$  in ordinata e  $\log_{10} d$  in ascissa ottenendo un grafico **lineare**. Infatti

$$L = Cd^{-s} \Rightarrow \text{Log } L = \text{Log } C - s \text{Log } d$$



Andamento di  $\log_{10} L$  al variare di  $\log_{10} d$  per una particolare linea costiera.

# Dimensione $D_R$ delle linee geografiche

---

In tutti i casi le misure sperimentali si collocavano, in questa rappresentazione logaritmica, **lungo una retta** con pendenza  $s$

- $s = 0.3$  per la costa ovest della Gran Bretagna, una delle più frastagliate al mondo
- $s = 0.15$  per i confini terrestri della Germania
- $s = 0.14$  per i confini terrestri del Portogallo
- $s = 0.02$  per per la costa del Sudafrica, una delle meno frastagliate al mondo
- $s \approx 0$  per il confine del Utah

N.B.: **al diminuire del “grado di irregolarità” il valore di  $s$  si riduce** e tende a zero.

## Dimensione $D_R$ delle linee geografiche

---

Il parametro  $D_R$  viene interpretato come la **dimensione frattale** della linea di costa (e quindi come misura della sua irregolarità). Questa ipotesi equivale a dire che questi oggetti geomorfologici sono “statisticamente” dei frattali autosimilari: ciascuna sua porzione appartiene ad una collezione (possibilmente infinita) di forme, ciascuna delle quali è fatta di copie (a scale differenti) di membri della collezione e che la probabilità di scegliere una data forma è indipendente dal numero di pezzi usati per formare la particolare forma considerata. Questa proprietà è caratteristica della maggior parte dei frattali “matematici”

---

Nelle applicazioni è molto più frequente stimare la dimensione di Hausdorff usando il metodo del “box-counting”. Si ricopre l’oggetto (piano) con griglie a maglia quadra di lato sempre più piccolo e si cerca di determinare (se esiste) il

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log N(s)}{\log(1/s)}$$

dove  $N(s)$  è il numero di maglie che contengono l’oggetto e  $s$  la misura del lato della maglia elementare.

Esempio (in questo caso una linea di costa)

Linea di costa dell’Islanda

---

**esempio:** una galassia. A partire dalla sua immagine ottica



La galassia M100

In questo caso si trasforma la sua immagine ottica in una versione binaria, ponendo pari a 1 tutti i pixel al di sopra di una certa luminosità e pari a zero tutti gli altri.

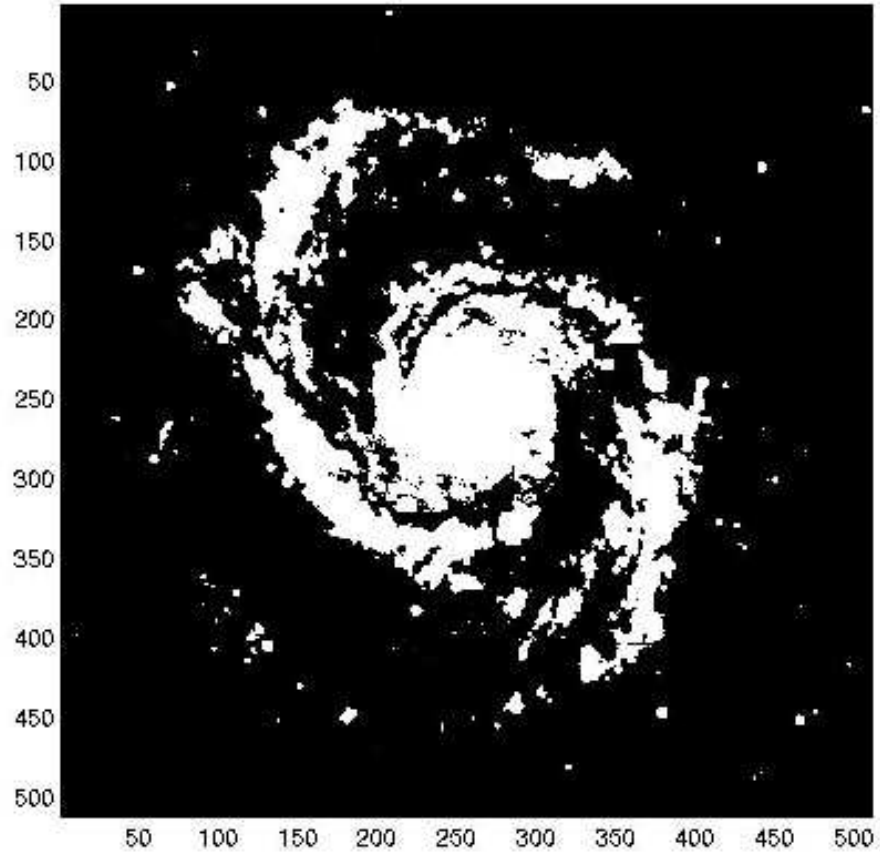


Immagine binaria ottenuta

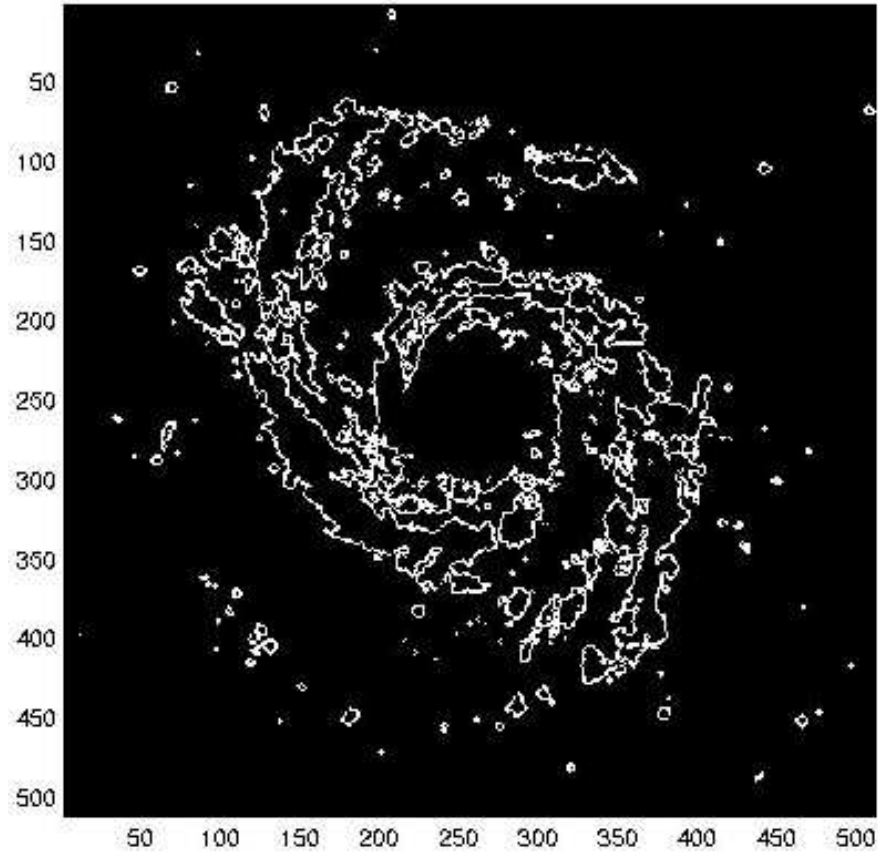


Immagine dei soli contorni attorno alle zone brillanti

---

Ora introduciamo griglie con maglie di varia misura e contiamo quante maglie contengono il contorno, ripetendo il processo variando la misura della maglia elementare. Le immagini mostrano il processo di conta. Se una maglia è bianca contiene il contorno altrimenti no.

Successione delle griglie

## dati ottenuti

---

dim. (in pixel) griglia elem.	n.ro di maglie cont. il contorno
-------------------------------	----------------------------------

---

2	6544
---	------

3	3897
---	------

6	1562
---	------

12	591
----	-----

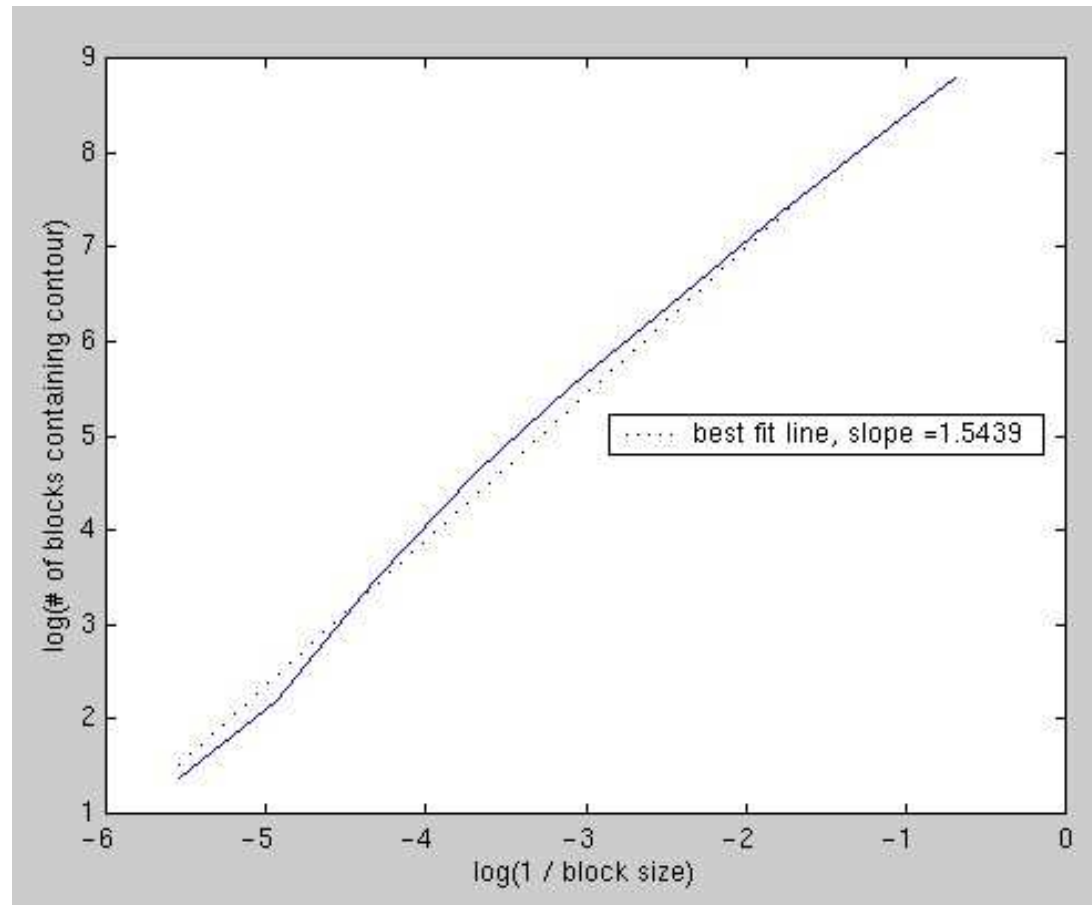
22	250
----	-----

40	101
----	-----

75	32
----	----

138	9
-----	---

256	4
-----	---



Dimensione frattale della galassia M100

# Altri fenomeni naturali di tipo frattale

---

- **L'accumulo di sedimenti**
- **Il legame “frequenza–magnitudo” nei terremoti**
- **L'erosione della crosta terrestre**

# Le sequenze sedimentarie

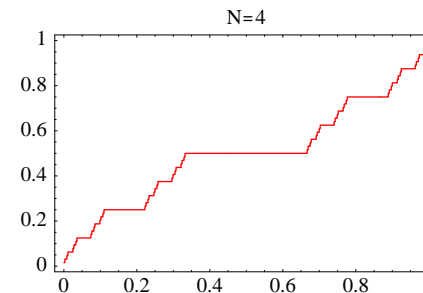
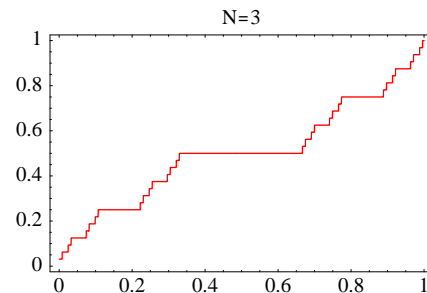
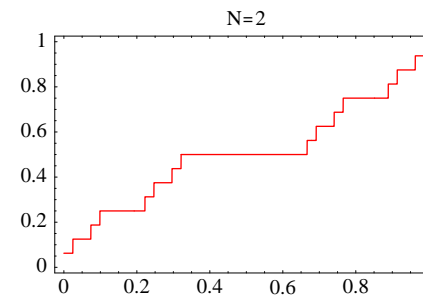
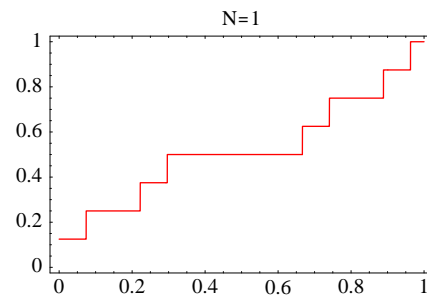
---

Il deposito di sedimenti fornisce un ulteriore esempio di problema che può essere affrontato con una tecnica frattale. È normale osservare nelle sequenze deposizionali delle interruzioni (*unconformities*) e generalmente queste vengono interpretate come i confini di distinte epoche geologiche. Queste interruzioni appaiono a qualsiasi scala temporale e possono essere attribuite a periodi in cui prevale l'erosione e l'assenza di sedimenti. Un semplice modello per il deposito di sedimenti è basato sulla *scala del diavolo*



# La scala del diavolo

È l'unica mappa  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  con le seguenti proprietà: è continua, è costante su ogni componente connessa del complementare rispetto a  $[0, 1]$  dell'insieme ternario di Cantor  $C$ , è monotona non decrescente,  $f(C) = [0, 1]$ .



Prime iterazioni della “scala del diavolo”

## Che c'entra la “scala del diavolo”?

---

Osserviamo una sequenza sedimentaria (Vermillion Cliffs, Utah) formata esclusivamente da strati di era Mesozoica



Sono molto ben visibili le discontinuità di accumulo.

## Altri esempi di “unconfomities”

---



Ischigualasto (Argentina)

## Altri esempi di “unconfomities”

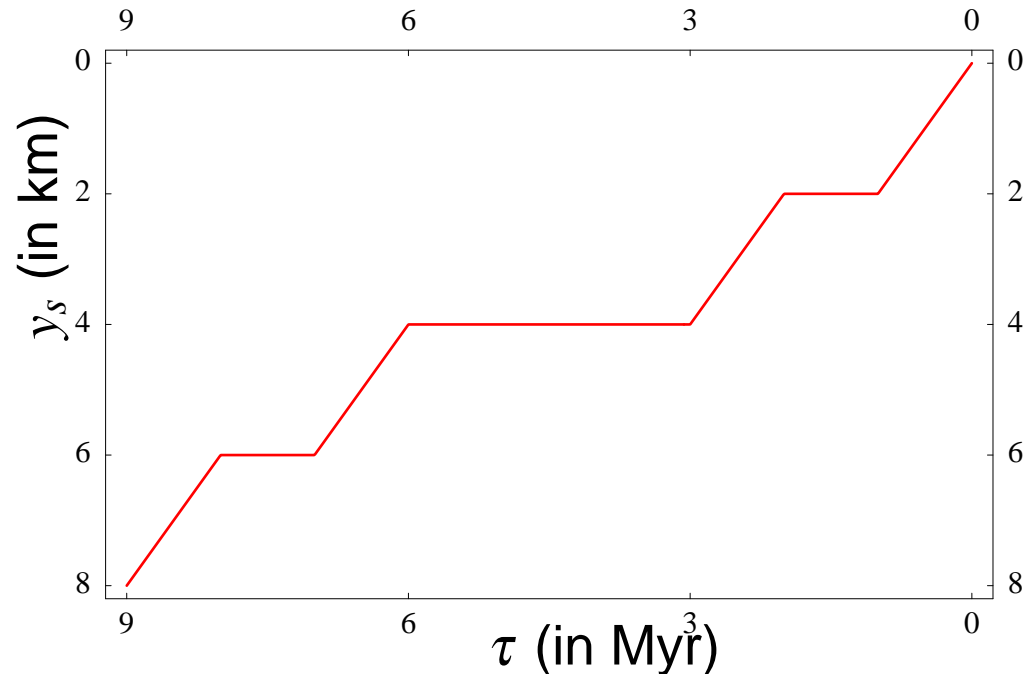
---



Grand Canyon (Utah e Arizona)

# Che c'entra la “scala del diavolo”?

L'idea di fondo è quella mostrata dalla figura (che utilizza la scala del diavolo alla seconda iterazione)



Età  $\tau$  (in Myr) del sedimento in funzione della profondità  $y_s$  (in km). Si notino le 3 “discontinuità della sequenza” (assenza di deposito) la più importante delle quali dura 3 Myr

## Modello per l'accumulo di sedimenti

---

Un semplice modello “frattale” di deposizione sedimentaria è il seguente: supponiamo che la velocità di accumulo  $R_i$  (nello strato  $i$ -esimo) sia

$$R_i = L_i / \tau_i,$$

dove  $L_i$  è lo spessore del sedimento accumulatosi nel periodo temporale  $\tau_i$ . Lo spessore  $L_i$  è dato dallo spessore totale  $L_o$  diviso in numero di strati  $N_i$  al livello  $i$ -esimo, cioè

$$L_i = L_o / N_i$$

▪

## Modello per l'accumulo di sedimenti

---

Supponiamo che il numero di strati al livello  $i$ -esimo si comporti con una legge del tipo

$$N_i = (\tau_o / \tau_i)^D .$$

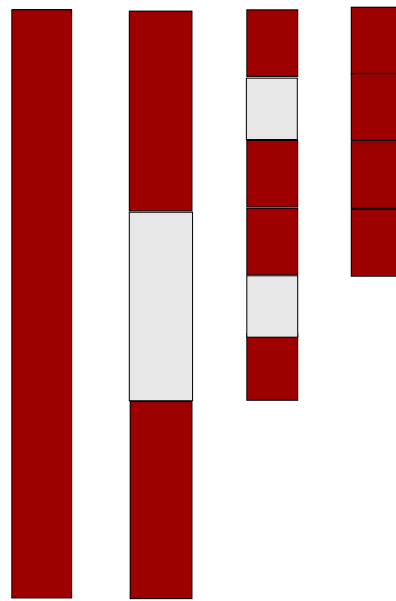
Combinando le tre relazioni si può eliminare  $L_i$  e trovare un legame diretto fra  $R_i$  e  $\tau_i$ : questo legame è una legge di tipo “potenza”

$$R_i = \frac{C}{\tau_i^{1-D}}$$

e quindi lineare in un diagramma di tipo  $\log - \log$  .

---

L'idea guida del modello è quello di vedere la sequenza sedimentaria osservata come un insieme ternario di Cantor "compresso" dato che le epoche che non danno luogo a sedimentazione non danno contributo agli strati.



Come l'insieme di Cantor è usato per costruire una sequenza sedimentaria

## Osservazione sperimentale

---

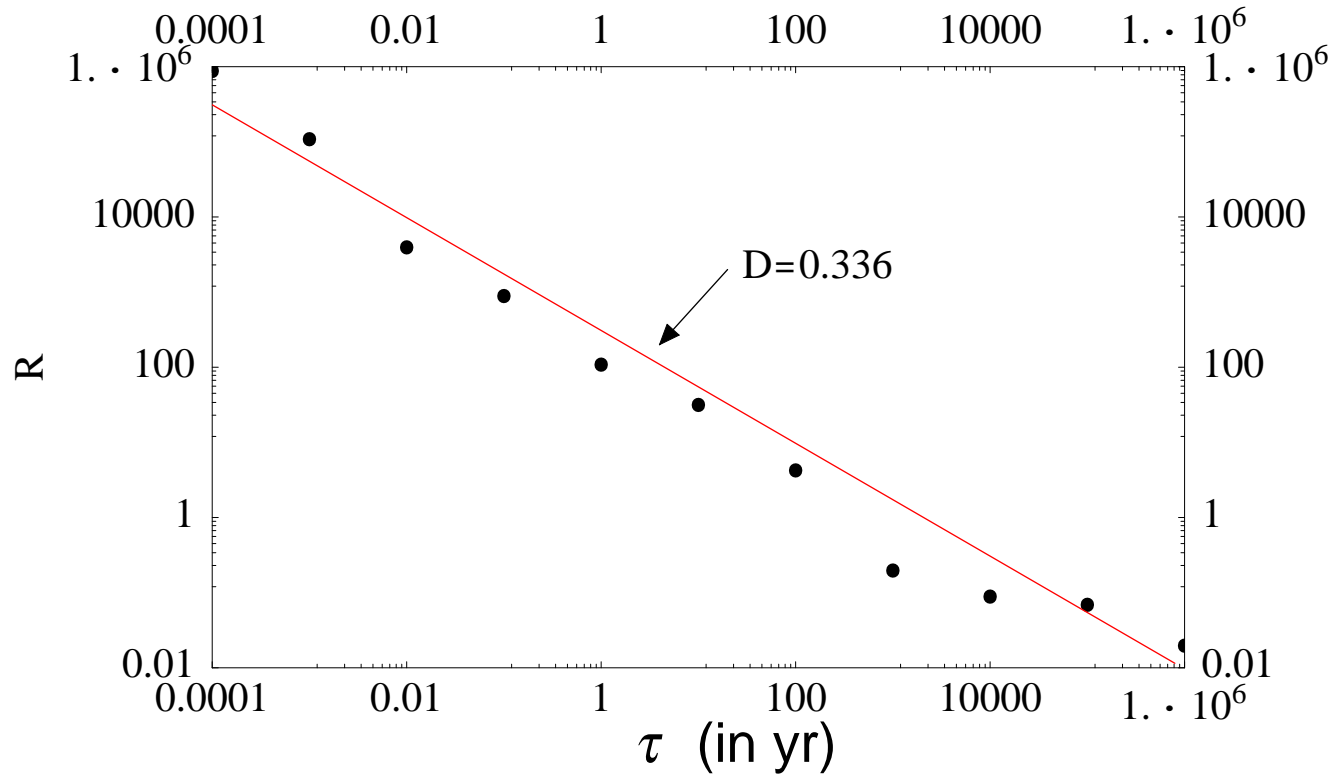
Dati raccolti da Sadler e Strauss e basata su 5600 valori della velocità di sedimentazione determinati in bacini alluvionali recenti e antiche sezioni stratigrafiche mostrano che i valori seguono la legge

$$R_i = \frac{C}{\tau_i^{1-D}}$$

con  $D = 0.336$ .

La correlazione è ragionevolmente buona per diversi ordini di grandezza (sia rispetto al tempo che alla velocità di sedimentazione)

# Osservazione sperimentale



Dipendenza della velocità di deposizione  $R$  dei sedimenti in funzione del periodo di tempo in cui si ha deposito.

---

Un modello del tutto analogo è stato applicato per giustificare la correlazione sia fra la velocità di sollevamento tettonico  $R_u$  e il relativo intervallo temporale  $\tau_u$ , sia la velocità di erosione  $R_e$  e l'analogo intervallo temporale  $\tau_e$ .

# Sismicità

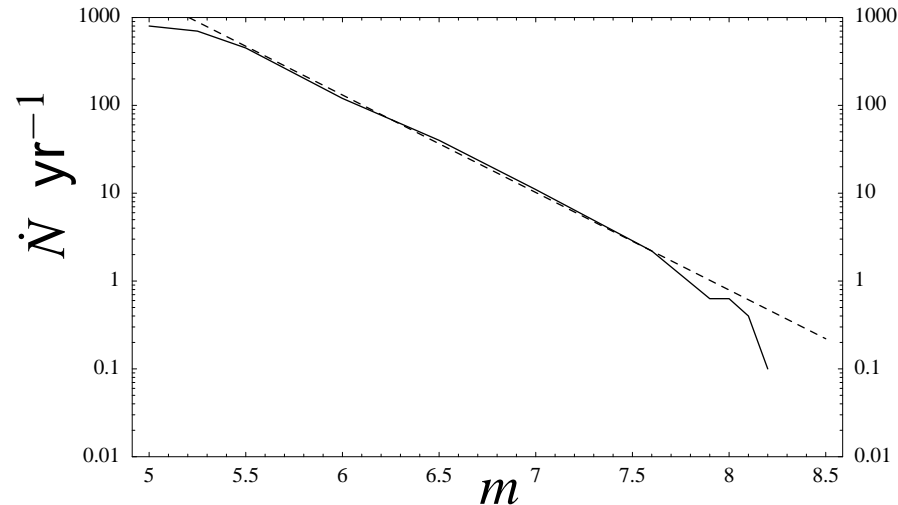
---

In tutte le zone di deformazione tettonica i fenomeni connessi, benché complessi, obbediscono statistiche frattali in una varietà di modi.

Utilizzando le reti sismiche locali, in grado di rilevare terremoti con magnitudo  $m \geq 2$  e quella mondiale, capace invece di rilevare eventi con  $m \geq 4$ , nonché i dati storici (molto meno precisi), sono state proposte varie correlazioni statistiche per determinare la relazione fra la frequenza degli eventi e la loro magnitudo. Quella generalmente accettata è la relazione di Gutenberg e Richter.

$$\text{Log } \dot{N} = -bm + \text{Log } \dot{a}$$

# La natura frattale dei terremoti



Distribuzione cumulativa (linea piena) delle magnitudo  $\dot{N}$  di terremoti per anno con magnitudo–momento maggiore di  $m$  in funzione di  $m$  (8719 terremoti, dati mondiali 1977-1989). La linea tratteggiata rappresenta la relazione di Gutenberg e Richter. La dimensione frattale corrispondente è  $D \approx 2.22$

# Discrepanze

---

La corrispondenza fra il modello e i dati non è perfetta: la figura precedente mostra che per magnitudo inferiori a 5.5 e superiori a 7.5 ci sono discostamenti anche significativi. La deviazione per  $m < 5.5$  è da attribuire al limite di risoluzione della rete sismica globale. La deviazione per  $m > 7.5$  potrebbe essere dovuta invece all'insufficiente numero (per nostra fortuna) di “grandi terremoti” ( $m > 7$ ) (a ci sono anche altre ragioni)

# Frammentazione della crosta terrestre

---

La crosta terrestre si frammenta per effetto di vari fenomeni sia di tipo tettonico (fratture, terremoti, ecc.) sia di tipo erosivo (ciclo termico, agenti eolici, azione delle acque, ecc.), sia di tipo esplosivo (sia naturali che prodotti dall'uomo). A dispetto della sua importanza anche economica ben pochi progressi sono stati fatti in direzione di una teoria sufficientemente generale della *frammentazione*.

# Frammentazione della crosta terrestre

---

La maggior difficoltà sembra rappresentata dal fatto che la frammentazione in genere ha luogo inizialmente attraverso una frattura localizzata che poi si propaga spazialmente e quest'ultimo è un fenomeno altamente non-lineare e quindi estremamente complesso. Basti pensare al fatto che la frammentazione comporta l'interazione fra fratture a varie scale di grandezza.

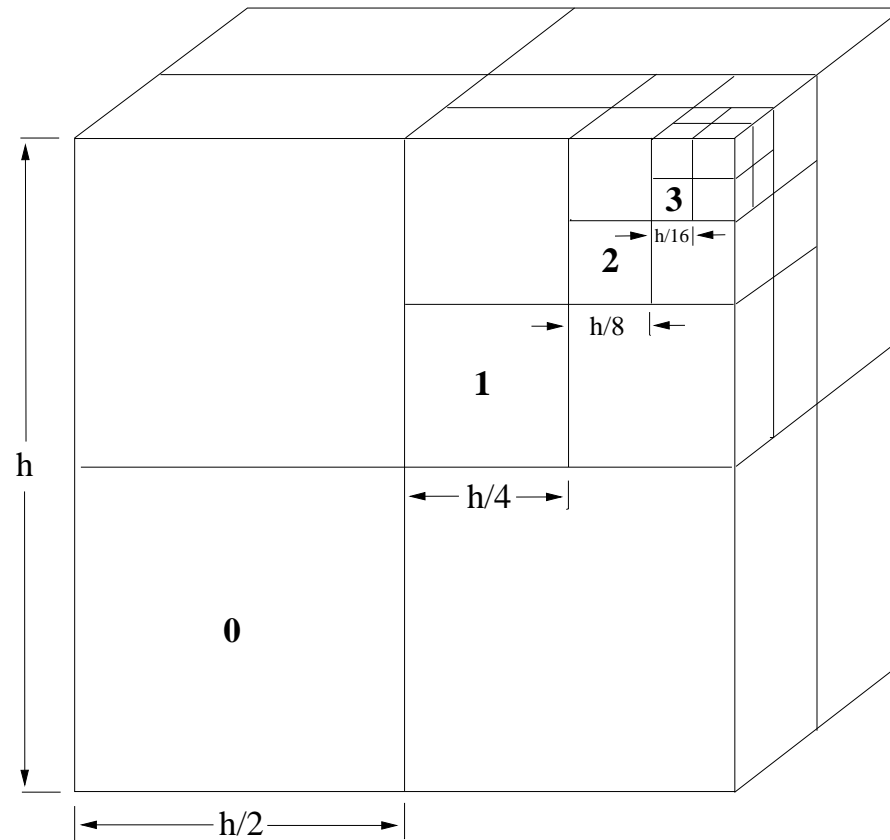
# Frammentazione della crosta terrestre

---

D'altra parte se si producono frammenti con un grande variabilità di dimensioni e se non sono evidenti delle scale naturalmente associate sia al materiale frammentato che al processo di frammentazione, è ragionevole aspettarsi un comportamento frattale della relazione “numero – dimensione” relativamente ai frammenti.

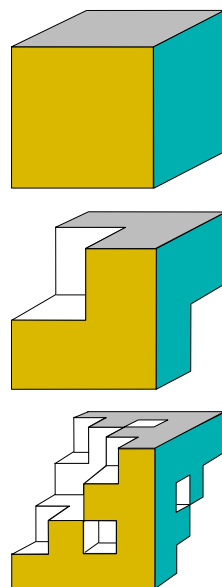
# Modello di frammentazione

Il modello è basato su una variante della spugna di Menger:



# Schema iterativo di frammentazione

---



Ad ogni passo (cambio di scala) due cubi diagonalmente opposti vengono separati dal blocco madre. I due blocchi così ottenuti non sono mai in diretto contatto fra loro

## Distribuzione dei frammenti

---

Se indichiamo con  $M(< r)$  la massa dei frammenti che “passano” attraverso un setaccio di apertura  $r$  e con  $M(> r)$  la massa di quelli trattenuti dal setaccio, si trova (in base al modello) che la distribuzione cumulativa dei frammenti segue la legge

$$\frac{M(< r)}{M_0} = \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\nu},$$

dove  $r_0$  rappresenta l'apertura del setaccio “limite” attraverso cui tutta la massa  $M_0$  riesce a passare. Da questa si deduce anche

$$N(> r) = Cr^{-D}$$

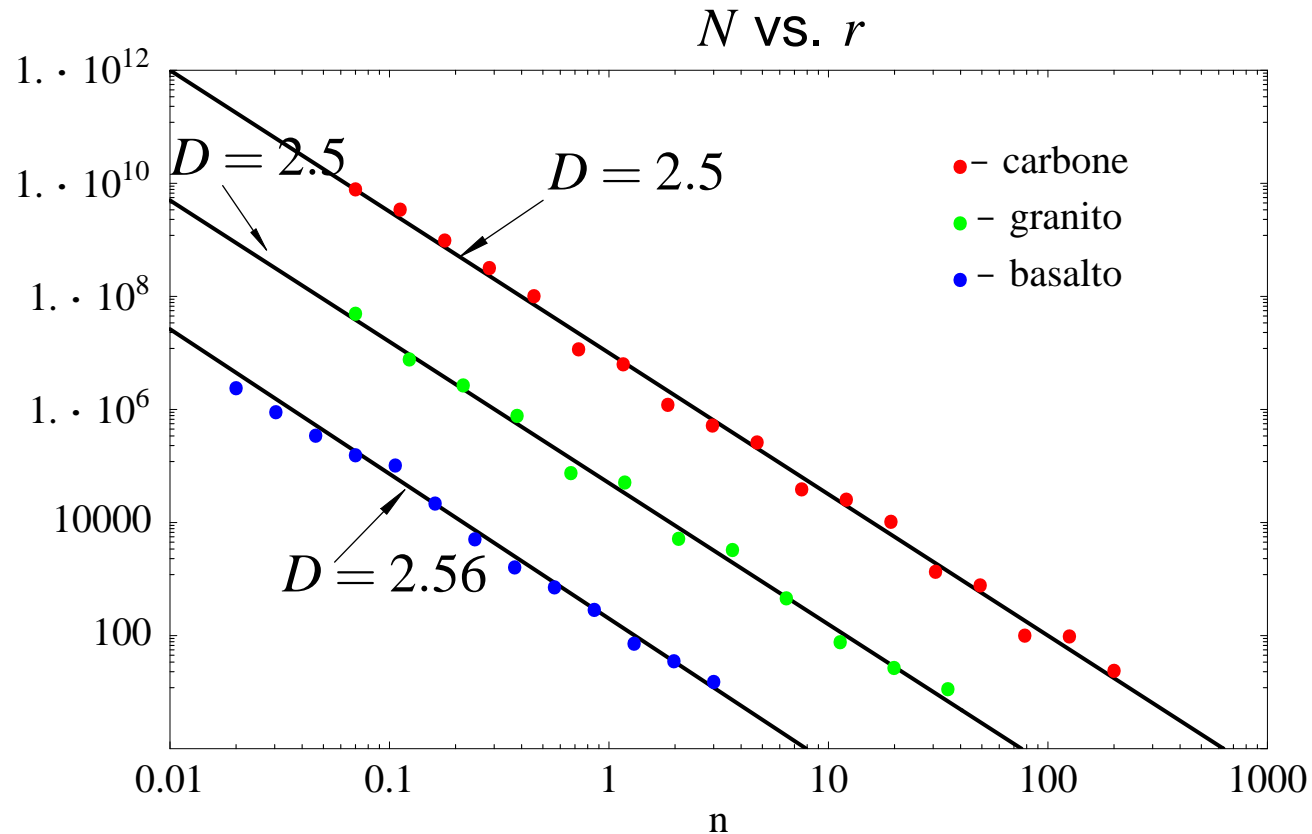
con  $D = 3 - \nu$ .

## Dati osservati

---

Una volta ottenuti i dati dell'analisi granulometrica (variando l'apertura  $r$  dei setacci), la relazione trovata è usata per convertire la distribuzione cumulativa di massa nella distribuzione del numero dei frammenti e specificare così una dimensione frattale.

# Dati osservati



Il numero di frammenti in funzione del diametro apparente  $r$  in tre esperimenti diversi di frammentazione con materiali differenti. È indicata la dimensione frattale stimata.

# Conclusioni

---

La teoria dei frattali andrebbe insegnata fin dalle scuole superiori e inserita nei corsi istituzionali di matematica nell'università. Le ragioni? Ad esempio queste ...

# Conclusioni

---



# Conclusioni

---

Dalla tesi di laurea di uno studente in Geologia ... (a.a. 1993–1994)



# Conclusioni

---

Dalla tesi di laurea di uno studente in Geologia ... (a.a. 1993–1994)

- ... se vogliamo sfruttare pienamente la **teoria dei frattali** dobbiamo essere in grado di risolvere tutti i problemi matematici che essa comporta e ciò lo si raggiunge solo con l'acquisizione di una **buona padronanza della matematica...**

# Conclusioni

---

Dalla tesi di laurea di uno studente in Geologia ... (a.a. 1993–1994)

- ... se vogliamo sfruttare pienamente la **teoria dei frattali** dobbiamo essere in grado di risolvere tutti i problemi matematici che essa comporta e ciò lo si raggiunge solo con l'acquisizione di una **buona padronanza della matematica...**
- Quest'ultima infatti adempie perfettamente al proprio ruolo di scienza pura, fornendoci uno strumento corredato delle sue **istruzioni per l'uso** scritte nel **linguaggio appropriato.**

**ancora ...**

---



## ancora ...

---

- Sta all'utente mettersi nelle condizioni di capire fino in fondo tali "istruzioni"

## ancora ...

---

- Sta all'utente mettersi nelle condizioni di capire fino in fondo tali "istruzioni"
- ...il mondo geologico sta cercando tuttora di leggere queste "istruzioni", incontrando a volte difficoltà nella loro comprensione. **L'aspettativa è che tali difficoltà vengano superate grazie ad una preparazione matematica di base migliore rispetto a quella media attuale**

---

# GRAZIE PER L'ATTENZIONE

